Il numero di Graham

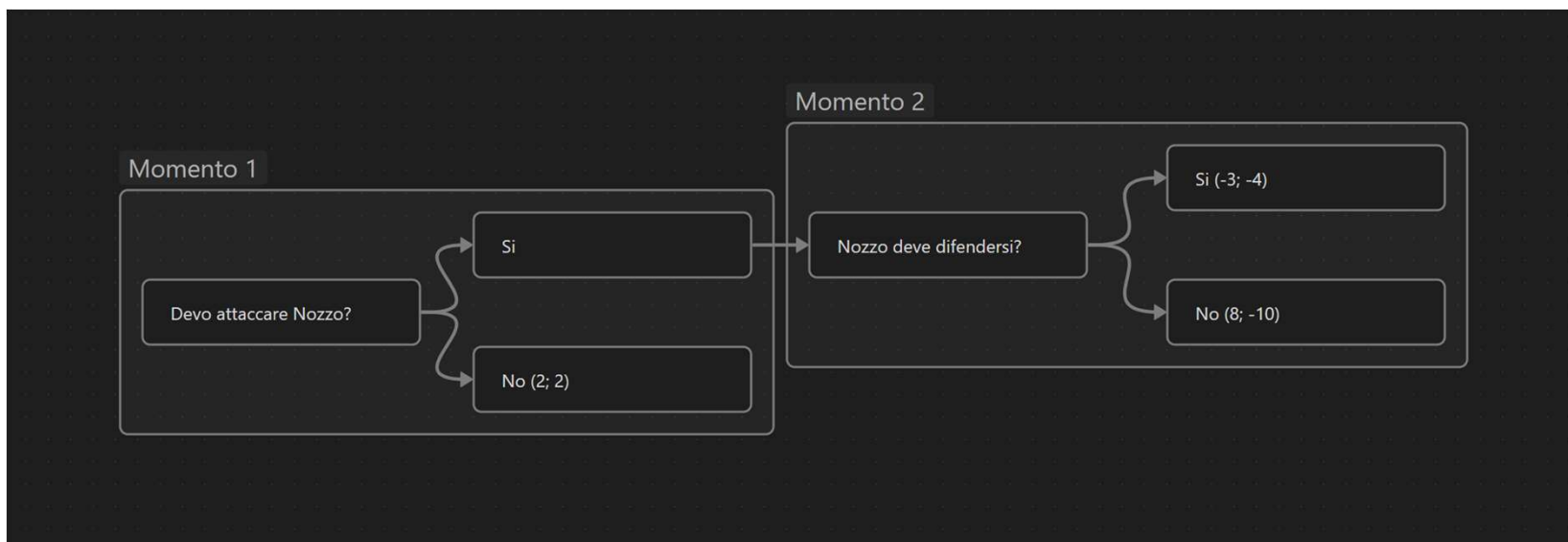
Un viaggio in direzione dell’infinito

La matematica discreta

La matematica discreta si occupa quasi completamente di insiemi **numerabili**.

Ha diverse applicazioni come:

- In informatica
- Geometria e topologia
- La teoria dei giochi
- **La teoria di Ramsey**

La teoria dei giochi

La teoria dei giochi con l’equilibrio di Nash

Azione A \ B	B si difende	B non si difende
A attacca	-3; -4	8; -10
A non attacca	////	2; 2

La teoria di Ramsey

La teoria di Ramsey si occupa di attività che solitamente rispondono a questa domanda:

Quante persone ci devono essere in una stanza, perché se ne possa trovare sempre un gruppo di 3, tali che ciascuna conosca tutte le altre o ciascuna non conosca nessuna delle altre?

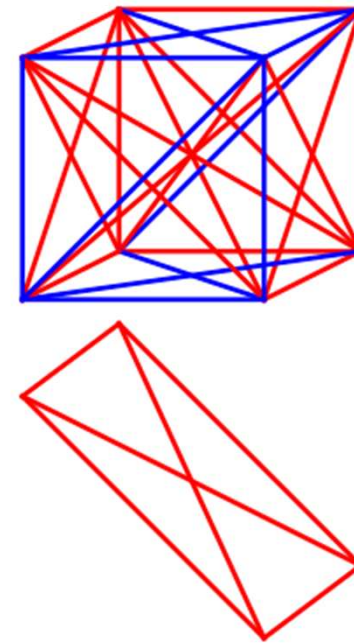
Prova tu!

Per provare a risolvere il precedente problema, utilizza questo metodo:

- Metti sul **foglio** ad una certa distanza **2 punti**, essi o si conoscono o non si conoscono. Usa due **colori diversi**.
- Aggiungi sempre più punti e i due colori per unirli. Nota che un punto deve essere **collegato** con **tutti gli altri punti**.
- Quando vedrai che si formerà un **triangolo** tutto dello stesso colore, conta i puntini e avrai trovato la soluzione.

Il problema di Graham

Il problema di Graham è un caso particolare della teoria di Ramsey; il testo è il seguente:

Si consideri un ipercubo di n *dimensioni. Si uniscano tutti i vertici, ottenendo un grafo completo con* 2^n *vertici. Si colorino quindi tutti gli spigoli con i colori rosso o blu, a piacere. Quale è il valore più basso di* n *per cui ogni possibile colorazione deve necessariamente contenere almeno un sotto-grafo monocromo completo con quattro vertici giacenti su un piano?*

L’utilizzo del numero di Graham

Il **problema di Graham**, non ha ancora una vera e propria soluzione, ma il suo valore è contenuto tra il **13** ed il **numero di Graham**.

Il limite superiore venne dimostrato dal matematico Graham e Bruce Lee Rothschild nel 1971, mentre quello inferiore da Barclay nel 2008

Quanto è grande il numero di Graham?

Per fare un paragone con un numero che, anche se molto grande, è ancora inconcepibile, proviamo a creare un computer che possa contenere il numero.

Ipotizziamo di riuscire a creare un hard disk che mantenga 1 bit ogni *volume di Plank*, ignorando tutti i limiti fisici che si sono già raggiunti con le tecnologie attuali,...

Aspetta aspetta… Ma cosa è un volume di Planck?

Le unità di misura di Planck sono unità di misura che utilizzano esclusivamente le costanti fisiche fondamentali, come la velocità della luce, per definire delle misure più «naturali».

Ad esempio la lunghezza di Planck è derivata dalla **velocità della luce**, dalla *costante di Planck* e dalla **costante di gravitazione universale**.

Un volume di Planck è di circa $4{,}2 * 10^{-105} m^3$

Quanto è grande il numero di Graham?

… dovremmo comunque creare un disco più grande dell'intero universo conosciuto ($4{,}2 * 10^{80} m^3$), servirebbero quindi più di $10^{185} bit$, che è un numero enormemente inferiore al numero di Graham.

Lo stesso problema però, è il fatto che neanche il numero di cifre ne il numero di cifre del numero di cifre (e così via) sarebbero mantenibili nell'universo con un computer del genere.

Ma quindi, come si scrive il numero di Graham?

Esistono diversi modi, tra cui il più famoso è il metodo di Knuth e *la tetrazione ricorsiva*.

Definiamo tramite Knuth la potenza come $\mathrm{a}^{\mathrm{b}} = \mathrm{a} \uparrow b$

La tetrazione è una potenza ripetuta:

$$ {}^{b}a = a \uparrow\uparrow b $$

Utilizziamo un esempio, $3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^{3}}$ (devono esserci b 3 nella torre)

Ma quindi, come si scrive il numero di Graham?

Definiamo adesso la tetrazione ricorsiva, ovvero una tetrazione ripetuta:

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b$$

Utilizziamo un esempio, $3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3$(devono esserci b $3 \uparrow\uparrow 3$ nella torre).

Ma non è ancora abbastanza

Il numero di Graham (G) è ancora enormemente superiore ad un numero rappresentabile in tal modo, perciò si utilizza la notazione ricorsiva.

$$G = g_{64}, con \begin{cases} g_1 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 \\ g_n = 3 \uparrow^{g_{n-1}} 3 \end{cases}$$

Nota: $\uparrow^{g_{n-1}}$vuol dire g_{n-1} frecce verso l'alto consecutive!

Informazioni sulla presentazione

Questa presentazione è stata creata per il progetto Thunder Network Education.

Tutte le fonti utilizzate sono contenute nel documento-fonte allegato.